לוגיקה (1) תרגיל מסכם (לא להגשה)

1. תהי $L = \{P_1, ..., P_n\}$ שפה לתחשיב הפסיקים. תהי $\varphi_0, ..., \varphi_k$ סדרה של פסוקים בשפה L כך שלכל $0 \leq i < k$ מתקיים $\varphi_i \models \varphi_{i+1}$ אבל לא מתקיים $\varphi_{i+1} \models \varphi_i$. הוכיחו כי $k \leq 2^n$, הוכיחו כי החסם הדוק.

2. יהי נתון גרף דו צדדי $G = \langle M, W, E \rangle$ (כלומר $E \subseteq M \times W$), שבו לכל קודקוד יש מספר סופי של שכנים. לכל $M' \subseteq M$ נאמר כי יש זיווג חוקי עבור M' אם קיימת פונקציה חח"ע $f : M' \to W$ כך שלכל $m \in M'$ מתקיים $(m, f(m)) \in E$. הוכיחו כי אם לכל תת קבוצה סופית של M יש זיווג חוקי אז יש זיווג חוקי עבור M. (רמז השתמשו במשפט הקומפקטיות לתחשיב הפסוקים).

3. יהיו $\mathfrak{A}$ ו-$\mathfrak{B}$ מבנים לשפה L לתחשיב היחסים.

   (א) הגדר שיכון מ-$\mathfrak{A}$ ל-$\mathfrak{B}$.

   (ב) יהי $H : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ שיכון. הוכיחו כי לכל נוסחה מהצורה

   $$\varphi(\bar{y}) = \forall x_1 ... x_n \psi(x_1, ..., x_n, \bar{y})$$

   כאשר ψ נוסחה חסרת כמתים, ולכל השמה s למבנה $\mathfrak{A}$ מתקיים: אם $val(\mathfrak{B}, H \circ s, \varphi) = T$ אז $val(\mathfrak{A}, s, \varphi) = T$. ($H \circ s$ היא ההרכבה של הפונקציות s עם H והיא השמה למבנה $\mathfrak{B}$).

4. תהי L שפה לתחשיב היחסים. תהי Γ קבוצת פסוקים ב-L שהיא דעתנית (כלומר לכל פסוק φ בשפה: $\varphi \in \Gamma$ או $\neg\varphi \in \Gamma$) ועקבית. הוכיחו או הפריכו:

   (א) לכל שני פסוקים φ, ψ בשפה אם $\varphi, \psi \in \Gamma$ אז $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$.

   (ב) לכל שני פסוקים φ, ψ בשפה אם $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ אז $\varphi \in \Gamma$ או $\varphi \in \Gamma$.

   (ג) לכל פסוק φ בשפה $\varphi \in \Gamma$ אםם $\neg\neg\varphi \in \Gamma$.

5. תהי $L = \{r\}$ (r סימן יחס דו-מקומי) שפה לתחשיב היחסים. רישמו הוכחה במערכת ההיסק D_0 של הפסוק:

   $$\forall x \forall y r(x, y) \to \forall z r(z, z)$$

   לגבי כל שורה בהוכחה כיתבו בדיוק מאיזה כלל היסק / אקסיומה היא נובעת.